Sucesiones definidas por recurrencia

Una sucesión está definida por recurrencia cuando damos en primer lugar el valor de A_1 y luego cada término A_n se da en función del término anterior A_{n-1} e incluso de A_{n-2} ó de A_{n-3}, etc.

Ejemplo 1

La sucesión 23, 27, 31, 35, 39, ... se puede definir por recurrencia así:

$A_1 = 23$ $A_n = A_{n-1} + 4$ (Cada elemento es igual al anterior más cuatro)

Abre el modelo ***recurre.ods***

En la primera celda de ***términos***, la que tiene un color más brillante escribe el primer término A_1 (junto al número 1)

Escribe la fórmula de A_2, que sería $A_{n-1} + 4$. En todo este documento, cuando leas A_{n-1} lo traduces como "la celda anterior". Escribe la fórmula en la segunda celda (sería **=B7+**4) y después la arrastras con el ratón hacia abajo hasta terminar la columna.

Deberás conseguir algo así:

Núm. orden	Términos
1	23
2	27
3	31
4	35
5	39
6	43

A este tipo de sucesiones, que se engendran sumando siempre el mismo número, se les llama **aritméticas**.

¿Qué forma tiene su gráfico?

Ejemplo 2

Esta sucesión se llama de **tipo geométrico**. Intenta reproducirla en tu modelo hasta el término 50:

2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Deberás cambiar la primera celda (el 2), la fórmula de la segunda (anterior por dos) y arrastrar.

¿En qué lugar figurará el término 4096?_____________

Ejemplo 3

Las sucesiones recurrentes nos dan muchas sorpresas: Escribe como A_1 el número positivo que quieras. Define luego que cada término es la raíz cuadrada del anterior. Comenta con otro equipo lo que ocurre en los últimos términos. ¿Cuál es el límite de esa sucesión?________________________________

Ves que el límite no depende del primer número, hagas lo que hagas, la sucesión **se siente atraída por ese límite**, al que llamaremos coloquialmente **atractor** (En Matemáticas superiores tiene esa palabra un sentido más complejo)

En algunas sucesiones recurrentes el límite no depende de A_1. El límite es un atractor. No importa dónde comiences.

Observarás que en el gráfico los puntos, independientemente del inicio, siempre se van acercando a una altura determinada, fijada por el atractor.

Límites que dependen de un parámetro

En una fórmula recurrente podemos incluir un **parámetro**. Es una cantidad variable a la que se puede dar el valor que quieras. En la Hoja de Cálculo reserva una celda para esa cantidad y la rotulas como "Parámetro". Recuerda que deberás usar el signo $ cuando te refieras a ella. Puedes darle el nombre **P** con **Insertar – Nombre** y así no tienes que pensar en los signos $.

Ejemplo 4

Veremos una sucesión recurrente muy popular que depende de un parámetro.

- Carga la celda del parámetro con el valor 16.En la celda A_1 escribe el número que quieras.
- En la segunda celda escribe la fórmula $0{,}5*(A_{n-1} + P/ A_{n-1})$, es decir: **=0,5*(B7+$F$5/B7)**
- Arrastra es fórmula a toda la columna.

¿Cuál es el límite? _______________________

Intenta cambiar A_1 varias veces. El límite no cambia, sigue siendo ___________. Es un atractor.

Cambia ahora el parámetro a los valores: 144, 25, 0,49, 10000, 2,56, ...

Saca una consecuencia: ¿Qué relación hay entre el límite y el parámetro?: ____

Esta propiedad la usan las calculadoras para hallar la raíz cuadrada.

Cálculo del limite de una sucesión recurrente

Cuando las sucesiones tienden a un límite es como si los términos se hicieran todos iguales. Es como si el término anterior fuera prácticamente igual al siguiente. Así, si la fórmula anterior era:

$A_n = 0,5*(A_{n-1} + P/ A_{n-1})$, cuando nos acercamos al límite se confunden A_n y A_{n-1} y a ambas les podemos llamar **x** y quedaría la ecuación:

x = 0,5*(x+P/x) Resuelve aquí esa ecuación y verás que su solución es Ö P. A la solución obtenida también se la llama **punto fijo.**

Hay otras muchas sucesiones recurrentes que tienen límite. Prueba alguna de las que se escriben a continuación, poniendo en todas A_1 =100, por ejemplo.

Otras fórmulas de recurrencia

Ejemplo 5

$\mathbf{A_n = (1+ A_{n-1})/2}$

Construye la sucesión en la Hoja y escribe su límite: ______________________

Plantea la ecuación con **x** : x = (1+x)/2

Resuelve y comprueba el límite

Ejemplo 6

$\mathbf{A_n = RAIZ(4+ A_{n-1})}$

Construye la sucesión en la Hoja y escribe su límite: ______________________

Plantea la ecuación con **x** :

Resuelve (la deberás elevar al cuadrado) y comprueba el límite

Ejemplo 7

$A_n = RAIZ(1+A_{n-1})$

Construye la sucesión en la Hoja y escribe su límite: ____________________

Plantea la ecuación con **x** :

Resuelve (la deberás elevar al cuadrado) y comprueba el límite

Ejemplo 8

$A_n = (1+A_{n-1})/A_{n-1}$

Construye la sucesión en la Hoja y escribe su límite: ____________________

Plantea la ecuación con **x** :

Resuelve y comprueba el límite. El número que resulta en estas dos sucesiones es el famoso número de oro, o áureo. Como trabajo voluntario, consulta las enciclopedias, Internet o libros de Arte o Matemáticas el significado histórico de ese número.

Ejemplo 9

Resuelve mediante sucesiones la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

El procedimiento de plantear una ecuación para resolver un límite se puede invertir: Se puede usar una sucesión recurrente para resolver una ecuación. Sigue estos pasos:

Saca factor común la **x** y despeja: x(x-5) + 6 =0 x = -6/(x-5)

Esta ecuación la convierto en sucesión recurrente: **A_n =** -6/(**A_{n-1-5}**)

Observo su límite con ordenador y si lo hay, será una solución. Inténtalo:

Solución: _______

Si se fracasa, se puede intentar despejar la **x** del paréntesis: (x-5) = -6/x x = 5 – 6/x

Convierte esa ecuación en una sucesión **$A_n = 5 - 6/A_{n-1}$**. ¿Resulta la misma solución?

Este método para resolver ecuaciones se llama **de iteración**.

Ejemplo 10

Resuelve por iteración (una sola solución) x^2-14x+K=0 y x^2-Kx-200=0, siendo K el número de tu ordenador

Soluciones: ____

Un misterio matemático

El fenómeno que vas a ver ahora tiene intrigados a los matemáticos y no saben explicar las razones del mismo. Consiste en el siguiente juego:Piensa un número entero, por ejemplo el 11

- Ahora, si es par, lo divides por 2 y si es impar lo multiplicas por 3 y le sumas 1
- Repite el cálculo anterior con el número que salga y así con el siguiente y con el siguiente... hasta
- que observes algo.

Comenzamos: 11 es impar, luego 11 Þ 11*3+1 = 34

34 es par, luego 34 Þ 34/2 = 17

17 es impar, luego 17 Þ 17*3+1 = 52

52 es par, luego 52 Þ 52/2 = 34

Esto es muy pesado. Se lo pedimos al ordenador. Escribe como primer término 11 y como fórmula en la celda B8:

=SI(RESIDUO(B7;2)=0; B7/2; 3*B7+1)

(Lo de RESIDUO significa "resto de dividir". Si vale cero es que es par.)

Arrastra la fórmula.

Explica qué ha ocurrido:____

Cambia A_1 a tu gusto, con un número entero positivo. Siempre ocurrirá lo mismo.

Lo que acabas de descubrir ocurre para todos los números enteros, pero nadie sabe todavía la razón. Muchos matemáticos intentan demostrarlo sin éxito. (Al menos al escribir este texto).

El conjunto de los números que se recorren cuando haces este juego se llama **Órbita**. Para ver la órbita de un número dado, lo escribes como A_1 y rellenas hacia abajo hasta que veas el primer 1 en la sucesión.

Por ejemplo, el 11 tiene una órbita de 15 números 11,34,17,52,....,4,2,1. Compruébalo.

Llamaremos **cúspide** de la órbita al punto más alto que tenga. Lo puedes ver muy bien en el gráfico.

El 11 tiene una cúspide de 52, que es el más alto de su órbita. Compruébalo.

Caos y orden

Fórmula logística

Llamamos fórmula logística a la que tiene la forma A_n = P* A_{n-1} *(1-A_{n-1}) donde P es un parámetro variable a voluntad. Esta fórmula se usa mucho en algunos problemas de Ecología, para ver

la evolución del número de individuos de una especie.

Ve escribiendo como valor del parámetro P los valores 0.5, 1, 1.5,y 2. Como Inicio o Semilla escribe cualquier número entre 0 y 1: Por ejemplo 0.3456.

Escribe aquí cuánto vale el límite en cada valor del parámetro:

Valor de P	Límite o atractor
0,5	
1	
1,5	
2	

Observarás que el valor del atractor es único para cada valor de P. Usa la técnica de la ecuación (llamar **x** a A_n y a A_{n-1}) para demostrarlo. Escríbelo aquí:

La fórmula logística tiene un límite único para valores de P entre 0.5 y 2. Ese límite no depende de la semilla que usemos, sino del parámetro P.

Ve subiendo ahora la P hasta llegar a 3. ¿Qué ocurre alrededor del valor 3?

Explícalo en los renglones siguientes:

Retrocede ahora de nuevo al valor 2 de P, en él hay un sólo atractor. Aumenta poco a poco el valor de P entre 2 y 4.

¿Para qué valor de P ves que haya dos atractores?

¿Para qué valor de P ves que haya Cuatro atractores?

Más difícil: ¿Para qué valor de P ves que haya ocho o más atractores?

Fíjate en esto ahora: ¿Para qué valor de P ves que se produzca **un verdadero caos**?

Efectivamente, al subir el valor de P (sin pasar de 4), un fenómeno que tenía estabilidad y que era previsible, de pronto se convierte en totalmente desordenado y produce una situación de caos.

La fórmula logística tiene varios atractores (o límites de oscilación) para valores de P entre 3 y 3.9 aproximadamente. A partir del 3.99...se produce un caos, es decir cualquier valor entre 0 y 1 lo puede tener la sucesión.

Cuestiones para pensar

A. Razonamos con órbitas y cúspides:

(1) ¿Qué tipo de números tendrá la órbita más pequeña?.

Piensa en el 4 , 2 y 1...pero esos no valen

Tu opinión:

(2) ¿Qué número entre 16 y 30 tiene la órbita más grande?.

El número:

(3) ¿Qué número entre 20 y 30 tiene la cúspide más alta?.

El número:

(4) Inventa dos números que tengan cúspide 64. Piensa un poco.

El primer número:

El segundo:

(5) ¿Puede ser el número 128 una cúspide?.

B. Inventa sucesiones recurrentes y si encuentras algún atractor interesante lo explicas aquí:

Ejercicio final

Confecciona un informe con todo lo que has aprendido en esta experimentación.